26 Soit un réel $a>0$ et (b_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $b_n=\dfrac{n}{(1+a)^n}$.

1. Montrer que $(1+a)^n \geq \dfrac{n(n-1)a^2}{2}$.

2. En déduire la limite de b_n.

3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q telle que $-1<q<1$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n|x_n|=0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

4. Calculer les limite suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+2}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

27 1. Montrer que pour tout entier $n>1$ et pour tout réel non nul x de $]-1,1[$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. En déduire que pour tout entier $n>1$ et pour tout réel non nul x de $]-1,1[$,

$\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

3. Utiliser le résultat précédent pour calculer les limites des suites définies par

$u_n = 1+2\dfrac{5}{3}+\ldots+(n+1)\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n\geq 0$ et

$v_n = 2-2\sqrt{2}+\ldots+2(n+1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n\geq 0$.

28 Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = a+b, \\ u_{n+1} = a+b-\dfrac{ab}{u_n}, \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_2 = \dfrac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0$,

$u_{n+1} = \dfrac{b^{n+2}-a^{n+2}}{b^{n+1}-a^{n+1}}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

29 Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_0, \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n, \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (a_n) est croissante.

2. Montrer que si (a_n) converge, alors sa limite est nécessairement nulle.

3. Montrer que si $a_0>0$, alors (a_n) diverge.

4. Montrer que si $a_0<-1$, alors $a_1>0$.

En déduire que (a_n) diverge.

5. On suppose que $-1<a_0<0$.

a. Montrer que la suite (a_n) est bornée par -1 et 0.

b. En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer la limite de (a_n) lorsque

a. $a_0=0$.

b. $a_0=-1$.

30 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0.1 \\ u_{n+1} = 1.6u_n(1-u_n), \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f: x\mapsto 1.6x(1-x)$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $0.1\leq u_n\leq \dfrac{3}{8}$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn